Seidenbergの補題と数式処理 (数式処理と数学研究への応用)

渡辺, 隼郎

数理解析研究所講究録
406巻 1980年 71-77

Seidenbergの補題と数式処理

津田塾大 渡辺 隼郎

補題（Seidenberg-Tarski） n個の変数 $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ とm個のパラメータ $a=(a_1,\cdots,a_m)$ の実係数の多項式の等式（代数方程式）と不等式（$>$, $\geqq$, $\leqq$, $<$）の有限系を $S(\sigma,a)$ とする。このとき（1）aの実係数の多項式の等式と不等式の有限系 $T_j(a)$ の有限集合 $T_1(a),\cdots,T_N(a)$ で次の性質をみたすものが存在する：任意に与えられた実数の値 σ に対して $S(\sigma,a)$ が少くとも1つの実解 (σ,a) を持つ$\Leftrightarrow$ある番号 h（$1\leqq h\leqq N$）があって，$T_h(a)$ の中の多項式の等式と不等式がすべてこのaに対してみたされる。（2）$T_1(a),\cdots,T_N(a)$ は $S(\sigma,a)$ から有理計算（多項式の四則と微分と代入）により有限回のステップで求めることができる。

この補題は実係数の1変数多項式が実の零点を幾つ持つかを判定する Sturm の定理を多変数の場合に拡張したものである。この補題は多変数多項式系に対する興味深い取扱い

を可能にしているので，数式処理にとって種々の応用があり得ると思われる．ここでは偏微分方程式のCauchy問題が与えられたとき，それが適切であるか否かを自動的に判定できるという問題を取上げる．もちろんこの事実は偏微分方程式論の分野の一部の人達にはよく知られていることである．私がここで取上げるのは，このような理論を他の分野，特に数学以外の分野の人達に開放するのに，数式処理が役に立つのではないかという希望的観測からであり，数式処理プログラムとして実現していく上で様々な工学的問題が現われるであろう，またそういう工学的問題を解決していくことが数式処理の分野の仕事であると思われるからである．

<u>定義</u>　$P(\sigma)$は(k,k)行列，$u(x,t)$はk次ベクトルとしたとき，Cauchy問題

$$
(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) & ,(0<t\leq T) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}
$$

が適切であるとは解の存在と一意性のほかに初期データに対する解の連続性が保証されることをいう．$\det(P(\sigma)-\lambda I) \equiv P_1(\sigma,\lambda)+iP_2(\sigma,\lambda)=0$ の根を $\lambda_j(\sigma)$ $(j=1,2,\cdots,k)$ として

$$
\Lambda(r) = \max_{|\sigma|=r}\Lambda(\sigma) = \max_{|\sigma|=r}\max_{1\leq j\leq k} \mathrm{Re}\{\lambda_j(\sigma)\}
$$

と書くことにする．Cauchy問題が適切であるための条件としては次の２つが良く知られている．

(Hadamard の条件) $|\sigma|$ が十分大なるとき $\Lambda(\sigma) \le A_1 \cdot \log(1+|\sigma|)$. (Gårding の条件) $|\sigma|$ が十分大なるとき $\Lambda(\sigma) \le A_2$. Gårding の条件が成り立てば Hadamard の条件が成り立つことは明らかであろう。逆に Hadamard の条件が成り立つとき Gårding の条件が成り立つことを示すにはまず次の補題が必要である.

補題 $\Lambda(r)$ は r が十分大なるとき r の代数関数である.

この補題より十分大なる r に対して ∞ における代数関数の Puiseux 級数展開を行うと $\Lambda(r) = Ar^h + $(低次の項) となる。どんな多項式 $Ar^h + \cdots$ も $\log(1+r)$ より $r \to \infty$ のとき大きくなることから, Hadamard の条件から Gårding の条件が導かれることが分る。

(補題の証明) 任意の r に対して $\Lambda = \Lambda(r)$ とすると, $\lambda_j = \mu_1 + i\mu_2$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ で次の条件 $S(\sigma, a)$: $\sum_{m=1}^{n} \sigma_m^2 - r^2 = 0$, $P_1(\sigma, \mu_1, \mu_2) = 0$, $P_2(\sigma, \mu_1, \mu_2) = 0$, $\Lambda = \mu_1$ をみたすものがある. そこで $a = (r, \Lambda)$ をパラメータとして Seidenberg の補題を適用すると, 多項式の等式と不等式の有限系 $T_j(r, \Lambda)$ の有限集合 $T_1(r, \Lambda), \ldots, T_m(r, \Lambda)$ があって, ある h に対して $T_h(r, \Lambda)$ の中のすべての多項式の等式と不等式は $\Lambda = \Lambda(r)$ に対してみたされる. $T_h(r, \Lambda)$ の中には少くとも1つ等式が存在することを示そ

う。$T_h(r,\Lambda)$ のすべてが $\Lambda=\Lambda(r)$ に対して不等式（$<$, $>$）であると仮定すると，これらの不等式は十分 Λ に近い $\Lambda'>\Lambda$ に対する (r,Λ') によっても満足される。これは $S(\sigma,a)$ が解 $(\sigma',\mu_1',\mu_2',r,\Lambda')$ を持つこと，したがって $\Lambda(\sigma')=\Lambda'>\Lambda$ を意味するが，$|\sigma'|=r$ であるから，これは不可能である。$T_j(r,\Lambda)$, $j=1,\cdots,m$ の中にあるすべての等式（多項式 $=0$）の多項式の積 $\Pi(r,\Lambda)$ を考えると $\Lambda=\Lambda(r)$ は $\Pi(r,\Lambda)=0$ の解である。よって $\Lambda(r)$ は区分的に代数曲線上にある。$\Pi(r,\Lambda)=0$ を満たす代数曲線の数は有限個であり（m 個以下），２つの代数曲線の交わりの点の数は有限個であるから，十分大きな r に対して $\Lambda(r)$ は１つの代数曲線の上にある。（証明終り）

以上をまとめると次のようになる。Cauchy 問題が与えられたとき，これから $n+2$ 個の変数 $(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\mu_1,\mu_2)$ と２個のパラメータ (r,Λ) に関する多項式の等式４つから成る系 $S(\sigma_1,\cdots,\sigma_n,\mu_1,\mu_2;r,\Lambda)$：$\sum_{m=1}^{n}\sigma_m^2-r^2=0$, $\Lambda=\mu_1$, $P_1(\sigma,\mu_1,\mu_2)=0$, $P_2(\sigma,\mu_1,\mu_2)=0$ を作る。それから Seidenberg の補題の証明中で示す方法により r と Λ の等式と不等式の系 $T_j(r,\Lambda)$ の有限集合 $j=1,\cdots,m$ を作る。次にその中の等式に対応する多項式の積として $\Pi(r,\Lambda)$ を作る。さらに $\Pi(r,\Lambda)=0$ で定義される代数関数 $\Lambda=\Lambda(r)$ をその

分岐点∞のまわりで Puiseux 級数展開したものを Newton の多角形と未定係数法を用いて求める。それを $\Lambda(\nu)=A\nu^h+\cdots$ とする。$h=0$ であるか $h>0$ で $A<0$ のとき Cauchy 問題(C)は適切である。

Seidenberg-Tarski の補題の証明は非常に長いので，その中から定式の意味を説明する部分，$S(\sigma,a)$ から $T_1(a)$, ---, $T_N(a)$ を計算する手続きにとって本質的と思われる部分を選んで述べる。(1) 多項式の等式と不等式の有限系 $S(\sigma,a)$ は唯一つの等式 $P(\sigma,a)=0$ から成るとすることができる。それは不等式 $R(\sigma,a)>0$ は ξ を新パラメータとして $\xi^2R(\sigma,a)-1=0$ と書け，$R(\sigma,a)\geq 0$ は $R(\sigma,a)-\xi^2=0$ と書け，有限個の $R_j(\sigma,a)=0$ は1つの等式 $\sum_{j=1}^{\ell}(R_j(\sigma,a))^2=0$ となるからである。(2) 変数の数が1個でパラメータが定数 $a=a^0$ である場合は Sturm の定理といわれる部分である。$P(\sigma)=P(\sigma,a^0)$, $D(\sigma)=(P(\sigma),P'(\sigma))$, $P_0(\sigma)=P(\sigma)/D(\sigma)$, $P_1(\sigma)=P_0'(\sigma)$ として $P_{j-2}(\sigma)=Q_{j-1}\cdot P_{j-1}(\sigma)-P_j(\sigma)$, $j=2,3,\cdots$ により Sturm の列を作る。$P_k(\sigma)$ は実根を持たない最初の多項式とする。Sturm の列とは $P_0(\sigma)$, $P_1(\sigma)$, ---, $P_k(\sigma)$ のことをいう。Sturm の定理はこの列の符号変化(0は除く)の数 $v(\sigma)$ が単調減少関数であって $P_0(a)\cdot P_0(b)\neq 0$ である $a<b$ に対して $v(a)-v(b)$ が区間 (a,b) における $P_0(\sigma)=0$ の実根の数であることを主張し

ている．$P_0(\sigma)=C_0\sigma^p+C_1\sigma^{p-1}+\cdots+C_p$，$P_0(\sigma_0)=0$，$|\sigma_0|\geq 1$とすると $|C_0|\cdot|\sigma_0|\leq|C_1|+\cdots+|C_p|<(1+C_1^2)+\cdots+(1+C_p^2)$ よって $P_0(\sigma)=0$ の実根の限界は $|\sigma|<1+(\mathrm{sgn}\,C_0/C_0)\cdot(p+\sum_{j=1}^{p}C_j^2)\equiv r$ で与えられる．よって $P_0(\sigma)=0$ が実根を持つ必要十分条件は $v(-r)>v(r)$ である．（3）変数の数が1個でパラメータが変化するとき，議論は（2）と全く同様に進むわけであるけれども，たとえばユークリッドの互除法を行うところでは a の多項式を係数とする σ の多項式の間の除算を反復するわけだから，一定の結果にはパラメータ a に関する条件である，a の多項式の等式と不等式（キ）の有限個が付随することになる．

（4）補題の証明には次の形で変数の数を1つ減らすことが本質的な部分となる：多項式 $P(\xi,\eta,a)$，$a=(a_1,\cdots,a_m)$ に対して，a の実多項式 $Q_1(a),\cdots,Q_N(a)$ と $\tilde{Q}_1(a),\cdots,\tilde{Q}_N(a)$ それと (ξ,a) の多項式 $q_1(\xi,a),\cdots,q_N(\xi,a)$ で次の条件をみたすものがある：$P(\xi,\eta,a)=0$ が少くとも1組の実解を持つ $\Leftrightarrow$ 少くとも1つ j があって $Q_j(a)\neq 0$，$\tilde{Q}_j(a)=0$ かつ $q_j(\xi,a)=0$ が少くとも一組の実解を持つ。

この事実を $P(\xi,\eta,a)$ が重複因子を持たず，パラメータ a が定数 a^0 の場合について証明する。$P(\xi,\eta)=P(\xi,\eta,a^0)$ とおく．$Q_\lambda(\xi)\equiv(\xi-\lambda)\dfrac{\partial P(\xi,\eta)}{\partial\eta}-\eta\dfrac{\partial P(\xi,\eta)}{\partial\xi}=0$ は次の性質を持つことが簡単に分る。$P(\xi,\eta)=0$ が実解を持つ $\Leftrightarrow$ $P(\xi,\eta)=0$

$Q_\lambda(\xi)=0$ が実解を持つ。さらにある λ_0 があって $P(\xi,\eta)$ と $Q_{\lambda_0}(\xi,\eta)$ は共通因子を持たないことが分る。$P(\xi,\eta)$ と $Q_{\lambda_0}(\xi,\eta)$ の η の多項式と考えたときの終結式を $R_1(\xi)$, ξ の多項式と考えたときの終結式を $R_2(\eta)$ とする. $R_1(\xi)=0$ の複素根を $\alpha_1,\cdots,\alpha_{N_1}$, $R_2(\eta)=0$ の複素根を $\beta_1,\cdots,\beta_{N_2}$ とする。(ξ,η) が $P(\xi,\eta)=0$ と $Q_{\lambda_0}(\xi,\eta)=0$ の根 $\Leftrightarrow$ $R_1(\xi)=0$ かつ $R_2(\eta)=0$ $\Leftrightarrow$ $(\xi,\eta)=(\alpha_i,\beta_j)$。今変換 $\xi=\xi'+\eta'$, $\eta=m\cdot\eta'$ $(m\neq 0,\ m\in R)$ により $P(\xi,\eta)=0$, $Q_{\lambda_0}(\xi,\eta)=0$ は $P'(\xi',\eta')=0$, $Q'_{\lambda_0}(\xi',\eta')=0$ に移り，前者の (α,β) は後者の (α',β') に移る. ここに $\alpha'=\alpha-\beta/m$, $\beta'=\beta/m$。α' が実のとき $m=I_m(\beta)/I_m(\alpha)$ の場合を除いて (α,β) も実である. すべての (i,j) に対して $m_0\neq I_m(\beta_j)/I_m(\alpha_i)$ なる m_0 を作る. この m_0 に対して $P(\xi,\eta)=0$, $Q_{\lambda_0}(\xi,\eta)=0$ が実解を持つ $\Leftrightarrow$ $P'(\xi',\eta')=0$, $Q'_{\lambda_0}(\xi,\eta)=0$ が α' が実の解を持つ $\Leftrightarrow$ $R'(\xi')=0$ が実解を持つ。

参考文献

Friedman, Generalized Functions and Partial Differential Equations. 1963 Prentice Hall

Seidenberg, A. A New Decision Method for Elementary Algebra. Annals of Mathematics Vol. 60, No. 2, September, 1954